О ТЕОРИЯХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ РИСКА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ и о парадоксах, емкостях и интегралах Шоке и обратных стохастических дифференциальных уравнениях

А. Н. ШИРЯЕВ*

*Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук и МГУ им. М.В.Ломоносова, кафедра теории вероятностей

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. ПАРАДОКСЫ.

• 1738 г. — Д. Бернулли, "Опыт новой теории измерения риска"*

Игра "**орел–решка**":

$$X_n = 2^{n-1}$$

τ – момент первого появления "орла": $\mathbf{P}(\tau = n) = \frac{1}{2^n}$

математическое

ожидание выигрыша

$$= \mathbf{E} X_\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^{n-1} = \infty$$

$\Longrightarrow$ начальный взнос $= \infty$

*D. Bernoulli, "Specimen theoriae novae de mensura sortis", *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, 5 (1738), 175–192.

Но в такую игру, между тем, играют. Заметим, что

вероятность $\mathbf{P}(\tau \le n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ уже при не очень больших n близка к 1.

моральное ожидание есть
$$\mathbf{E} \ln X_\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(2^{n-1}) \cdot 2^{-n} = \ln 2$$
$\Longrightarrow$ начальный взнос $= 2$

Габриэль Крамер (в письме к Николаю Бернулли, 1728 г.) предложил вместо $\log X_\tau$ рассматривать $\sqrt{X_\tau}$. Тогда $\mathbf{E}\sqrt{X_\tau} = (2-\sqrt{2})^{-1}$ и начальный взнос равен $[(2-\sqrt{2})^{-1}]^2 = 2.9142\ldots$.

• 1921 г. — Фрэнк Найт, “Risk, uncertainty, and profit”* предложил различать риск и неопределенность:

РИСК	**НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ**
относится к ситуации, когда известна вероятность исходов (страхование жизни,...)	относится к ситуации, когда трудно или невозможно что-то сказать о вероятностях событий (число белых и черных шаров есть 100, а их пропорция неизвестна)

*F.H.Knight, *Risk, uncertainty, and profit*, Houghton Mifflin, NY, 1921.

• 1934 г. — Карл Менгер (Karl Menger) опубликовал работу

“Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre:
Betrachtungen im Anschluß an das sogenannte Petersburger Spiel”*

(завершенную, в основном, еще в 1920-х годах), в которой отмечалась историческая роль работы Д. Бернулли в создании теории ожидаемой полезности.

*Zeitschrift für Nationaloekonomie (J. Econom.), 5:4 (1934), 459-485;
англ. пер.: “The role of uncertainty in economics”, Chap. 16 in “Essays in Mathematical Economics”, Princeton Univ. Press, 1967;
см. также опубликованную чуть раньше работу Менгера “Bernoullische Wertlehre und Petersburger Spiel”, Ergebnisse Math. Kolloquiums, 6 (1934), 26-27.

Эта и другие работы К. Менгера оказали большое влияние на Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна, чьи исследования нашли отражение в книге:

- 1944 г. — J. von Neumann, O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior**.

*Princeton Univ. Press, 1944; рус. пер.: Теория игр и экономическое поведение, Наука, М., 1970.

Развитая Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном теория ожидаемой полезности (**фНМ-теория**) в простейшей ситуации оперирует со следующими объектами:

- результаты (экспериментов, лотерей, игр) ξ;
- их распределения P_ξ;
- функция полезности $u = u(x)$;
- ожидаемая функция полезности, т.е. $\mathbf{E}u(\xi)$.

Рациональное поведение — **максимизация** средней функции полезности:

$$\boxed{\mathbf{E}u(\xi) \to \sup_{\xi}}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть задана функция полезности $u(x)$. Говорят, что

$$\xi \text{ лучше } \eta \quad \text{или} \quad P_\xi \text{ лучше } P_\eta$$

(обозначение: $\xi \succ \eta$ или $P_\xi \succ P_\eta$), если

$$\mathbf{E}u(\xi) > \mathbf{E}u(\eta).$$

Говорят также, что ξ не хуже η (обозначение: $\xi \succeq \eta$), если $\mathbf{E}u(\xi) \geq \mathbf{E}u(\eta)$.

В фНМ-теории предполагаются выполненными 4 аксиомы:

$\boxed{\text{полнота}}$ $\boxed{\text{транзитивность}}$
$\boxed{\text{непрерывность}}$ $\boxed{\text{независимость}}$

Полнота: для каждой пары распределений P_ξ и P_η имеет место альтарнатива

$$\text{или } P_\xi \preceq P_\eta, \quad \text{или } P_\eta \preceq P_\xi, \quad \text{или } (P_\xi \preceq P_\eta \text{ и } P_\eta \preceq P_\xi).$$

Транзитивность: если $P_\xi \succeq P_\eta$ и $P_\eta \succeq P_\zeta$, то $P_\xi \succeq P_\zeta$.

Непрерывность: если $P_\xi \succeq P_\eta \succeq P_\zeta$, то существует $\lambda \in (0, 1]$ такое, что

$$P_\eta = \lambda P_\xi + (1 - \lambda) P_\zeta.$$

Независимость: если $P_\xi \preceq P_\eta$, то

$$\lambda P_\xi + (1 - \lambda) P_\zeta \preceq \lambda P_\eta + (1 - \lambda) P_\zeta$$

для всех $\lambda \in (0, 1]$ и всех P_ζ.

• 1954 г. — Леонард Сэвидж, "The foundations of statistics"*, где был предложен (основанный на СЕМИ аксиомах) субъективный подход:

индивидуум сам назначает (конечно-аддитивные) вероятности тех или иных событий (для чего может привлекаться формула Байеса)

Пример: Ваше решение о шансах Вашей любимой команды выиграть очередной матч, если Вам известны результаты предшествующих игр.

*L. J. Savage, *The foundations of statistics*, Wiley, New York, 1954.

- В экономической науке широко известны, однако, **парадоксы Алле** (M. Allais, 1953) и **Эллсберга** (D. Ellsberg, 1961), которые говорят о том, что в реальной жизни индивидуумы часто не следуют предписаниям теорий фНМ и Сэвиджа.

ПАРАДОКС АЛЛЕ. В урне находятся 100 шаров с номерами $\omega = 1, 2, \ldots, 100$, при этом $\mathbf{P}(\{\omega\}) = 1/100$. Есть две игры, в каждой из них игроку предлагается выбрать одно из двух: его <u>выигрыш может составить</u>

либо $\xi_1(\omega)$, либо $\xi_2(\omega)$ — в первой игре и
либо $\xi_3(\omega)$, либо $\xi_4(\omega)$ — во второй игре:

Первая игра: $\xi_1(\omega) = 100$ для всех ω;

$$\xi_2(\omega) = \begin{cases} 200, & \text{если } 1 \le \omega \le 70, \\ 0, & \text{если } 71 \le \omega \le 100. \end{cases}$$

Вторая игра:

$$\xi_3(\omega) = \begin{cases} 100, & \text{если } 1 \le \omega \le 15, \\ 0, & \text{если } 16 \le \omega \le 100; \end{cases}$$

$$\xi_4(\omega) = \begin{cases} 200, & \text{если } 1 \le \omega \le 10, \\ 0, & \text{если } 11 \le \omega \le 100. \end{cases}$$

Наблюдения за реальными игроками показывают, что

в первой игре выбирают ξ_1 (т.е. $\xi_1 \succ \xi_2$),

а во второй игре выбирают ξ_4 (т.е. $\xi_4 \succ \xi_3$).

Имея в виду определение предпочтительности в фНМ-теории:

$$\xi \succ \eta \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{E}u(\xi) > \mathbf{E}u(\eta),$$

находим, что

$$\begin{aligned} \xi_2 \prec \xi_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad 0.7u(200) < u(100), \\ \xi_3 \prec \xi_4 \quad &\Longleftrightarrow \quad 0.15u(100) < 0.1u(200). \end{aligned}$$

Следовательно,

$1.05u(200) < 0.15u(100) < 0.1u(200)$ — **ПРОТИВОРЕЧИЕ!**

Таким образом,

поведение индивидуума не согласуется с фНМ-теорией.

ПАРАДОКС ЭЛЛСБЕРГА. Этот парадокс связан с понятием **субъективной вероятности**. В урне находятся 90 шаров:

30 красных (**R**) и

60 черных (**B**) и белых ($\mathbb{W}$) — в неизвестной пропорции.

Снова есть две игры, и выигрыш составит: $\xi_{\mathrm{R}}(\omega)$ или $\xi_{\mathrm{B}}(\omega)$ — в первой игре, и $\xi_{\mathrm{RW}}(\omega)$ или $\xi_{\mathrm{BW}}(\omega)$ — во второй:

Первая игра:

$$\xi_{\mathrm{R}}(\omega) = \begin{cases} 100, & \text{если } \omega = \mathrm{R}, \\ 0, & \text{если } \omega = \mathrm{B} \text{ или } \omega = \mathrm{W}; \end{cases}$$

$$\xi_{\mathrm{B}}(\omega) = \begin{cases} 100, & \text{если } \omega = \mathrm{B}, \\ 0, & \text{если } \omega = \mathrm{R} \text{ или } \omega = \mathrm{W}; \end{cases}$$

Вторая игра:

$$\xi_{\mathrm{RW}}(\omega) = \begin{cases} 100, & \text{если } \omega = \mathrm{R} \text{ или } \omega = \mathrm{W}, \\ 0, & \text{если } \omega = \mathrm{B}; \end{cases}$$

$$\xi_{\mathrm{BW}}(\omega) = \begin{cases} 100, & \text{если } \omega = \mathrm{B} \text{ или } \omega = \mathrm{W}, \\ 0, & \text{если } \omega = \mathrm{R}. \end{cases}$$

Наблюдения за игроками выявляют такие предпочтения индивидуумов:

$$\xi_{\mathsf{R}}(\omega) \succ \xi_{\mathsf{B}}(\omega) \quad \text{и} \quad \xi_{\mathsf{BW}}(\omega) \succ \xi_{\mathsf{RW}}(\omega).$$

Если это так, то тогда

$$100\mathbf{P}(\mathsf{R}) \overset{(1)}{>} 100\mathbf{P}(\mathsf{B}) \quad \text{и} \quad 100\mathbf{P}(\mathsf{B} \cup \mathsf{W}) \overset{(2)}{>} 100\mathbf{P}(\mathsf{R} \cup \mathsf{W}).$$

Но если (субъективная) вероятность $\mathbf{P}(\mathsf{W})$ мала, то второе неравенство $\overset{(2)}{>}$ есть (почти) $100\,\mathbf{P}(\mathsf{B}) > 100\,\mathbf{P}(\mathsf{R})$, что противоречит первому неравенству $\overset{(1)}{>}$.

§ 2. ЕМКОСТЬ И ИНТЕГРАЛЫ ШОКЕ.

• Согласно "Математической энциклопедии" (т. 2) **емкость множества** — это "функция множеств, возникающая в теории потенциала как аналог понятия электростатической емкости".

В теории вероятностей понятие "емкость множества" было введено в 1953 г. Густавом Шоке* и стало широко известным благодаря книге П.-А. Мейера "Вероятность и потенциалы"†.

*G. Choquet, "Theory of capacities", Ann. Inst. Fourier, 5 (1954), 131-295; www.numdam.org/article/AIF_1954_131_0.pdf

†P.-A. Meyer, "Probabilités et potentiel", Hermann, Paris, 1966, 320 pp.; рус. пер.: М., 1973; см. также: C. Dellacherie, P.-A. Meyer, "Probabilités et potentiel", 1975-1987, 291+476+229+377 pp.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство. **Емкостью** (на $\mathcal{F}$) называется функция множеств $V = V(A)$, $A \in \mathcal{F}$, обладающая следующими свойствами:

$$V(A) \in [0,1]; \qquad V(\varnothing) = 0, \quad V(\Omega) = 1;$$
$$\text{если} \quad A \subseteq B, \quad \text{то} \quad V(A) \leq V(B);$$
$$\text{если} \quad A_n \uparrow A, \quad \text{то} \quad V(A_n) \uparrow V(A);$$
$$\text{если} \quad A_n \downarrow A, \quad \text{то} \quad V(A_n) \downarrow V(A).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Аддитивности у V, вообще говоря, не предполагается.

ПРИМЕР. Если $\mathcal{P}\{P\}$ — семейство вероятностных мер, то $V(A) = \sup_{P \in \mathcal{P}} P(A)$ — емкость.

Исключительно важную роль играют емкости, обладающие свойством **сильной субаддитивности** (называемым также свойством субмодулярности или 2-alternating condition):

$$V(A \cap B) + V(A \cup B) \leq V(A) + V(B), \qquad A, B \in \mathcal{F}. \qquad (*)$$

Если в $(*)$ для всех $A, B \in \mathcal{F}$ имеет место равенство, то емкость называют **аддитивной**.

Свойство $(*)$ часто используется, например, в статистике — для обобщения леммы Неймана–Пирсона, теоремы Байеса и т.д. на случай, когда вместо вероятности рассматривают емкости.

• **Интеграл по емкости**. Интеграл $\int_\Omega X(\omega)\,V(d\omega)$ как интеграл Лебега относительно емкости, вообще говоря, не определен. В случае, когда $V = \mathbf{P}$ — вероятностная (и, значит, счетно-аддитивная) мера, имеем

$$\int_\Omega X(\omega)\,V(d\omega) = \mathbf{E}X,$$

если только $\min(\mathbf{E}X^+, \mathbf{E}X^-) < \infty$.

Если $X \geq 0$ и $F(t) = \mathbf{P}(X \leq t)$ — функция распределения, то

$$\mathbf{E}X = \int_0^\infty \mathbf{P}(X > t)\,dt = \int_0^\infty (1 - F(t))\,dt,$$

где интеграл по dt можно понимать и как интеграл Лебега, и как интеграл Римана.

Вместо “$X > t$” можно брать и “$X \geq t$”.

В общем случае, когда $X \in \mathbb{R}$ и интеграл Лебега $\mathbf{E}X$ определен, имеем

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{0} [\mathbf{P}(X > t) - 1]\, dt + \int_{0}^{\infty} \mathbf{P}(X > t)\, dt,$$

или, что равносильно,

$$\mathbf{E}X = \int_{-\infty}^{0} [\mathbf{P}(X \geq t) - 1]\, dt + \int_{0}^{\infty} \mathbf{P}(X \geq t)\, dt.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Интеграл Шоке от $X = X(\omega)$ по емкости $V = V(A)$, $A \in \mathcal{F}$, — это величина

$$(\text{C}) \int_\Omega X(\omega)\, V(d\omega) := \int_{-\infty}^{0} [V(X > t) - 1]\, dt + \int_0^\infty V(X > t)\, dt, \quad (*)$$

где $V(X > t) := V(\{\omega\colon X(\omega) > t\})$ (при условии, что в $(*)$ не возникает неопределенности $-\infty + \infty$).

Введем обозначение $\boxed{C_V(X) = (\text{C}) \int_\Omega X(\omega)\, V(d\omega)}$. Тогда

$$C_V(X + Y) \neq C_V(X) + C_V(Y).$$

Тем не менее выполнены следующие свойства.

(a) Если $X \le Y$, то

$$C_V(X) \le C_V(Y) \quad (\underline{\underline{\text{монотонность}}}).$$

(b) Если $\lambda > 0$, то

$$C_V(\lambda X) = \lambda C_V(X)$$

$$(\underline{\underline{\text{положительная однородность}}}).$$

(c) Если $a \in \mathbb{R}$, то

$$C_V(aX) = a^+ C_V(X) - a^- C_V(X).$$

(d) Если $a \in \mathbb{R}$, то

$$C_V(a + X) = a + C_V(X)$$

$$(\underline{\underline{\text{трансляционная однородность}}}).$$

(e) Если емкость сильно субаддитивна, т.е.

$$V(A\cap B)+V(A\cup B)\le V(A)+V(B), \qquad A,B\in\mathcal{F},$$

то

$$C_V(X+Y)\le C_V(X)+C_V(Y) \quad \text{(субаддитивность)}$$

и

$$[C_V((X+Y)^2)]^{1/2}\le [C_V(X^2)]^{1/2}+[C_V(Y^2)]^{1/2}.$$

(f) Если X и Y комонотонны, т. е. возрастают/убывают одновременно: $[X(\omega)-X(\omega')]\,[Y(\omega)-Y(\omega')]\ge 0$, то выполнено свойство аддитивности

$$C_V(X+Y)=C_V(X)+C_V(Y).$$

(g) Если пространство Ω конечно, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, и $X = X(\omega)$ принимает значения $X(\omega_i) = x_i$, где $0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n$, то, полагая

$$A_i = \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \ge x_i\} = \{\omega_i, \dots, \omega_n\}$$

имеем

$$\begin{aligned} C_V(X) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) V(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i [V(A_i) - V(A_{i-1})], \qquad x_0 = 0. \end{aligned}$$

(h) Если $A \in \mathcal{F}$, то

$$(\mathrm{C}) \int_\Omega I_A(\omega)\, V(d\omega) = V(A).$$

ПРИМЕР 1. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ — множество рабочих и $X(\omega_i)$ — продолжительность работы рабочего ω_i в течение смены. Пусть

$$X(\omega_1) \leq X(\omega_2) \leq \cdots \leq X(\omega_n),$$

при этом если работает группа рабочих $A \subseteq \Omega$, то стоимость продукции, произведенной ими за один час, равна $V(A)$. Суммарная стоимость подсчитывается так.

Если $X(\omega_1) = X(\omega_2) = \cdots = X(\omega_n)$, то стоимость произведенной продукции равна $X(\omega_1)V(\{\omega_1, \ldots, \omega_n\})$, т.е. $X(\omega_1)V(\Omega)$.

Если рабочий ω_1 заканчивает работу раньше других, то оставшаяся группа рабочих производит продукцию на сумму $[X(\omega_2) - X(\omega_1)]V(\{\omega_2, \ldots, \omega_n\})$, и т.д.

Таким образом, суммарная стоимость выработанной продукции равна

$$
\begin{aligned}
X(\omega_1)V(\{\omega_1,\dots,\omega_n\}) &+ (X(\omega_2)-X(\omega_1))V(\{\omega_2,\dots,\omega_n\}) \\
&+ \dots + (X(\omega_n)-X(\omega_{n-1}))V(\{\omega_n\}) \\
= \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})V(A_i) &\quad (= C_V(X)),
\end{aligned}
$$

где $x_0 = 0$, $V(A_i) = V(\{\omega_i,\dots,\omega_n\})$.

ПРИМЕР 2 (парадокс Алле и его разрешение). Напомним, что величины выигрышей были таковы:

$$\xi_1(\omega) = 100 \ \text{ для всех } \omega = 1, 2, , 100;$$

$$\xi_2(\omega) = \begin{cases} 200, & \text{если } 1 \le \omega \le 70, \\ 0, & \text{если } 71 \le \omega \le 100. \end{cases}$$

$$\xi_3(\omega) = \begin{cases} 100, & \text{если } 1 \le \omega \le 15, \\ 0, & \text{если } 16 \le \omega \le 100; \end{cases}$$

$$\xi_4(\omega) = \begin{cases} 200, & \text{если } 1 \le \omega \le 10, \\ 0, & \text{если } 11 \le \omega \le 100. \end{cases}$$

$$\mathbf{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{100}, \qquad i = 1, 2, \ldots, 100.$$

Емкость V выберем специальным образом:

$$V(A) = w \circ \mathbf{P}(A) \equiv w(\mathbf{P}(A)),$$

где w — функция искажения (distorsion):

$$w(0) = 0, \quad w\Big(\frac{1}{10}\Big) = 0.08, \quad w\Big(\frac{15}{100}\Big) = 0.1,$$
$$w\Big(\frac{7}{10}\Big) = 0.45, \quad w(1) = 1,$$

причем w кусочно постоянна и непрерывна справа на $[0,1]$. Тогда

$$\begin{aligned} C_V(\xi_1) &= \int_0^\infty V(\{\omega\colon \xi_1(\omega) \geq t\})\, dt \\ &= \int_0^{100} V(\{\omega\colon \xi_1(\omega) = 100\})\, dt \\ &= \int_0^{100} w \circ \mathbf{P}(\{\omega\colon \xi_1(\omega) = 100\})\, dt \\ &= \int_0^{100} w \circ \mathbf{P}(\Omega)\, dt = \int_0^{100} w(1)\, dt = 100. \end{aligned}$$

Аналогично, $C_V(\xi_2) = 90$, $C_V(\xi_3) = 10$, $C_V(\xi_4) = 16$. Тем самым если

$$\xi \succ \eta \iff C_V(\xi) > C_V(\eta),$$

то

$$\xi_1 \succ \xi_2 \quad \text{и} \quad \xi_4 \succ \xi_3$$

(так поступают индивидуумы, но фНМ-теория дает $\xi_3 \succ \xi_4$).

ПРИМЕР 3 (парадокс Эллсберга и его разрешение).
Напомним правила игры. В урне — 90 шаров:

30 красных (**R**) и

60 черных (**B**) и белых ($\mathbb{W}$) — в <u>неизвестной пропорции</u>.

Выигрыши $\xi_{\mathrm{R}}(\omega)$, $\xi_{\mathrm{B}}(\omega)$, $\xi_{\mathrm{RW}}(\omega)$, $\xi_{\mathrm{BW}}(\omega)$ таковы:

$$\xi_{\mathrm{R}}(\omega) = \begin{cases} 100, & \text{если } \omega = \mathrm{R}, \\ 0, & \text{если } \omega = \mathrm{B} \text{ или } \omega = \mathrm{W}; \end{cases}$$

$$\xi_{\mathrm{B}}(\omega) = \begin{cases} 100, & \text{если } \omega = \mathrm{B}, \\ 0, & \text{если } \omega = \mathrm{R} \text{ или } \omega = \mathrm{W}; \end{cases}$$

$$\xi_{\mathrm{RW}}(\omega) = \begin{cases} 100, & \text{если } \omega = \mathrm{R} \text{ или } \omega = \mathrm{W}, \\ 0, & \text{если } \omega = \mathrm{B}; \end{cases}$$

$$\xi_{\mathrm{BW}}(\omega) = \begin{cases} 100, & \text{если } \omega = \mathrm{B} \text{ или } \omega = \mathrm{W}, \\ 0, & \text{если } \omega = \mathrm{R}. \end{cases}$$

Положим: $V(\mathsf{R}) = \frac{1}{3}, \quad V(\mathsf{W}) = V(\mathsf{B}) = \frac{2}{9}, \quad V(\mathsf{R} \cup \mathsf{W}) = \frac{5}{9},$

$$V(\mathsf{B} \cup \mathsf{W}) = \frac{2}{3}, \quad V(\mathsf{R} \cup \mathsf{B} \cup \mathsf{W}) = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} C_V(\xi_{\mathsf{R}}) &= \int_0^\infty V(\{\omega\colon \xi_{\mathsf{R}}(\omega) \ge t\})\,dt \\ &= \int_0^{100} V(\{\omega\colon \xi_{\mathsf{R}}(\omega) = 100\})\,dt = \frac{100}{3}; \end{aligned}$$

аналогично, $C_V(\xi_{\mathsf{B}}) = \frac{200}{9}$, $C_V(\xi_{\mathsf{RW}}) = \frac{500}{9}$, $C_V(\xi_{\mathsf{BW}}) = \frac{200}{3}$. Поэтому (считая, что $\xi \succ \eta \iff C_V(\xi) > C_V(\eta)$) имеем

$$\xi_{\mathsf{R}} \succ \xi_{\mathsf{B}} \quad \text{и} \quad \xi_{\mathsf{BW}} \succ \xi_{\mathsf{RW}}.$$

Это, как правило, находится в соответствии с решениями индивидуумов, но противоречит теории полезности Сэвиджа.

§ 3. НЕЛИНЕЙНОЕ g-ОЖИДАНИЕ.

• Введенные выше интегралы Шоке дают пример нелинейного функционала или, как иногда говорят, *нелинейного ожидания*.

Сейчас мы будем иметь дело с вероятностной ситуацией, моделируемой броуновским движением.

А именно, будет рассматриваться

$$\boxed{\textbf{нелинейное } g\textbf{-ожидание}}$$

Шиге Пенга (Shige Peng).

- Рассмотрим обратное стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) на $[0,T]$:

$$Y_t = \xi + \int_t^T g_s(Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dB_s, \qquad t \in [0,T]. \qquad (*)$$

Пусть $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbf{P})$, а $g = g_s(y,z)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|g_s(y,z) - g_s(y',z')| \leq L(|y-y'| + |z-z'|).$$

Тогда в классе адаптированных процессов

$$(Y,Z) \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbf{P}) \times L^2(\mathcal{F}_T, \mathbf{P})$$

решение уравнения $(*)$ существует и единственно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Покажем, как из мартингальных соображений можно получить обратное уравнение. Пусть $\xi \in L^2(\mathcal{F}_T, \mathbf{P})$ и $Y_t = \mathbf{E}(\xi \,|\, \mathcal{F}_t)$. Тогда из теории представления мартингалов имеем:

$$Y_t = \mathbf{E}\xi + \int_0^t Z_s \, dB_s, \qquad (**)$$

где величина Z_s является $\mathcal{F}_s$-измеримой и $\mathbf{E}\int_0^T Z_s^2 \, ds < \infty$. Из $(**)$ следует, что

$$\xi = \mathbf{E}\xi + \int_0^T Z_s \, dB_s,$$

Значит, $Y_t = \xi - \int_t^T Z_s \, dB_s$, или

$$dY_t = Z_t \, dB_t, \quad 0 \le t \le T, \qquad Y_T = \xi,$$

что и есть обратное уравнение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (**Ш. Пенг**).

Нелинейным g-ожиданием
случайной величины ξ (обозначение: $\boldsymbol{\mathcal{E}_g(\xi)}$)
называется $\mathcal{F}_0$-измеримое решение Y_0 уравнения

$$Y_t = \xi + \int_t^T g_s(Y_s, Z_s)\,ds - \int_t^T Z_s\,dB_s.$$

Нелинейным <u>условным</u> g-ожиданием
случайной величины ξ (обозначение: $\boldsymbol{\mathcal{E}_g(\xi \,|\, \mathcal{F}_t)}$)
называется $\mathcal{F}_t$-измеримая случайная величина Y_t.

СВОЙСТВА нелинейных g-ожиданий.

1. $\mathcal{E}_g(\xi+\eta) \neq \mathcal{E}_g(\xi)+\mathcal{E}_g(\eta)$.

2. $\mathcal{E}_g(\xi+\eta\,|\,\mathcal{F}_t) \neq \mathcal{E}_g(\xi\,|\,\mathcal{F}_t)+\mathcal{E}_g(\eta\,|\,\mathcal{F}_t)$ ($\mathbf{P}$-п.н.).

3. Если $\xi_1 \geq \xi_2$ ($\mathbf{P}$-п.н.), то

$$\mathcal{E}_g(\xi_1) \geq \mathcal{E}_g(\xi_2) \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_g(\xi_1\,|\,\mathcal{F}_t) \geq \mathcal{E}_g(\xi_2\,|\,\mathcal{F}_t) \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}).$$

4. Для $\mathcal{F}_t$-измеримой случайной величины ξ

$$\mathcal{E}_g(\xi\,|\,\mathcal{F}_t) = \xi \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}).$$

5. Если ξ не зависит от $\mathcal{F}$ (т.е. не зависит от $I_A(\omega)$, $A \in \mathcal{F}_t$), то $\mathcal{E}_g(\xi\,|\,\mathcal{F}_t) = \mathcal{E}_g(\xi)$.

6. Если $g \equiv 0$ ($\mathbf{P}$-п.н.), то

$$\mathcal{E}_g(\xi) = \mathbf{E}\xi \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_g(\xi\,|\,\mathcal{F}_t) = \mathbf{E}(\xi\,|\,\mathcal{F}_t) \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}).$$

- Для $A \in \mathcal{F}_T$ положим $\mathsf{P}_g(A) = \mathcal{E}_g(I_A)$.

Функция множеств $\mathsf{P}_g(\cdot)$ называется **g-вероятностью**.

§ 4. ОБРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИНТЕГРАЛЫ ШОКЕ ДЛЯ НЕПОЛНЫХ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ

• Покажем, как обратные СДУ оказываются полезными для нахождения верхних и нижних цен $\mathbb{C}^*$ и $\mathbb{C}_*$ и их оценок (сверху и снизу) на неполных рынках. Для определенности рассмотрим на $[0, T]$

финансовый (R, S)-рынок (модель Блэка–Шоулса):

$$dR_t = rR_t\,dt, \quad r > 0 \text{ — известно,}$$
$$dS_t = S_t(\mu_t\,dt + \sigma_t\,dB_t), \quad s_0 > 0,$$
$$\sigma_t > 0 \text{ для } t \in [0, T].$$

Если μ_t, σ_t известны, то рынок **полный**. В этом случае справедливая цена Европейского опциона с платежным обязательством ξ определяется следующей формулой (для простоты считаем, что $r = 0$):

$$\boxed{\mathbb{C}(\xi) = \mathbf{E}_Q \xi},$$

где Q — мера, эквивалентная $\mathbf{P}$ и такая, что

$$\frac{dQ}{d\mathbf{P}} = \exp\left\{\int_0^T \nu_s\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \nu_s^2\,ds\right\}, \qquad \nu_s = \frac{\mu_s - r}{\sigma_s}.$$

(предполагается, что $\int_0^T \nu_s^2\,ds < \infty$).

Однако если μ_t и σ_t, $t \leq T$, заранее не известны, то рынок неполон и о цене $\mathbb{C}(\xi)$ говорить не приходится. В этом случае говорят об интервале цен опциона:

$$[\mathbb{C}_*(\xi), \mathbb{C}^*(\xi)].$$

Если цена опциона принадлежит этому интервалу, то ни покупатель, ни продавец не будут иметь безрискового дохода. Каждый может выиграть или проиграть, но только за счет случайного характера цен.

Пусть $r - k\sigma_t \le \mu_t \le r + k\sigma_t$. Для $\nu_t = (\mu_t - r)/\sigma_t$ имеем $\sup_{0\le t\le T}|\nu_t| \le k$. Пусть

$$\frac{dQ^\nu}{d\mathbf{P}} = \exp\left\{\int_0^T \nu_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \nu_s^2\, ds\right\}, \quad \mathcal{P}_k = \left\{Q^\nu\colon \sup_{0\le t\le T}|\nu_t| \le k\right\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$Y_t = \xi + \int_t^T k|Z_s|\, ds - \int_t^T Z_s\, dB_s.$$

Покажем, что

$$Y_0 \;=\; \sup_{Q\in\mathcal{P}_k} \mathbf{E}_Q\xi \;(= \mathbb{C}^*(\xi)), \tag{$*$}$$

т.е. Y_0 в точности совпадает с $\mathbb{C}^*(\xi)$.
(Формулы $\mathbb{C}^*(\xi) = \sup_{Q\in\mathcal{P}_k}\mathbf{E}_Q\xi$ и $\mathbb{C}_*(\xi) = \inf_{Q\in\mathcal{P}_k}\mathbf{E}_Q\xi$ известны из финансовой математики.)

Для доказательства $(*)$ возьмем $\widetilde{\nu}_t = k\,\mathsf{sign}\,Z_t$. Тогда

$$\begin{aligned}
Y_t &= \xi + \int_t^T k|Z_s|\,ds - \int_t^T Z_s\,dB_s \\
&= \xi + \int_t^T kZ_s\,\mathsf{sign}\,Z_s\,ds - \int_t^T Z_s\,dB_s \\
&= \xi + \int_t^T \widetilde{\nu}_s Z_s\,\mathsf{sign}\,Z_s\,ds - \int_t^T Z_s\,dB_s \\
&= \xi + \int_t^T Z_s\,(\widetilde{\nu}_s\,ds - dB_s).
\end{aligned}$$

Пусть $\widetilde{B}_s := B_s - \int_0^s \widetilde{\nu}_t\,dt$. По теореме Гирсанова процесс $\widetilde{B} = (\widetilde{B}_s)_{s\le T}$ является $Q^{\widetilde{\nu}}$-броуновским движением. Значит,

$$Y_0 = \mathbf{E}_{Q^{\widetilde{\nu}}}\xi \le \sup_{Q\in\mathcal{P}_k} \mathbf{E}_Q\xi.$$

Аналогично,

$$Y_t \le \operatorname{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{P}_k} \mathbf{E}_Q(\xi\,|\,\mathcal{F}_t) \quad \mathbf{P}\text{-п.н.}$$

Чтобы получить оценку снизу ($Y_0 \geq \sup_{Q\in\mathcal{P}_k} \mathbf{E}_Q\xi$), поступим так. Возьмем $\alpha = (\alpha_t)_{t\leq T}$, где α_t измерима относительно $\mathcal{F}_t$ и $|\alpha_t| \leq k$, $t \leq T$. Рассмотрим уравнение

$$Y_t^{(\alpha)} = \xi + \int \alpha_s Z_s^{(\alpha)}\,ds - \int_t^T Z_s^{(\alpha)}\,dB_s, \qquad t \leq T.$$

и пусть мера $Q^{(\alpha)}$ такова, что

$$\frac{dQ^{(\alpha)}}{dP} = \exp\left\{\int_0^T \alpha_s\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \alpha_s^2\,ds\right\}.$$

Тогда процесс $B^{(\alpha)}$, где $B_t^{(\alpha)} = B_t - \int_0^t \alpha_s\,ds$, будет броуновским движением. А поскольку $Y_t^{(\alpha)} = \xi + \int_t^T Z_s^{(\alpha)}(\alpha_s\,ds - dB_s)$, то

$$Y_t^{(\alpha)} = \mathbf{E}_{Q^{(\alpha)}}(\xi \,|\, \mathcal{F}_t) \quad \text{и, в частности,} \quad Y_0^{(\alpha)} = \mathbf{E}_{Q^{(\alpha)}}\xi.$$

У нас $\alpha_t Z_t \le k|Z_t|$, и, по теореме сравнения для обратных стохастических дифференциальных уравнения,

$$Y_t^{(\alpha)} \le Y_t \quad (\mathbf{P}\text{-п.н.}), \quad t \le T.$$

Следовательно, $\mathbf{E}_{Q(\alpha)}\xi = Y_0^{(\alpha)} \le Y_0$, и так как $|\alpha_t| \le k$, то $\sup_{Q\in\mathcal{P}_k} \mathbf{E}_Q \xi \le Y_0$. Таким образом,

$$Y_0 = \sup_{Q\in\mathcal{P}_k} \mathbf{E}_Q \xi \quad (= \mathbb{C}^*(\xi)),$$

и, аналогично, $Y_t \le \operatorname{ess\,sup}_{Q\in\mathcal{P}_k} \mathbf{E}_Q(\xi \,|\, \mathcal{F}_t)$.

Если теперь рассмотреть уравнение

$$Y'_t = \xi - \int_t^T k|Z'_s|\,ds - \int_t^T Z'_s\,dB_s.$$

то аналогично показывается, что

$$Y'_0 = \inf_{Q \in \mathcal{P}_k} \mathbf{E}_Q \xi \quad (= \mathbb{C}_*(\xi)),$$

Итак, значения $\mathbb{C}_*(\xi)$ и $\mathbb{C}^*(\xi)$ в рассматриваемом случае неполного рынка с $|\nu_t| = |(\mu_t - r)/\sigma_t| \le k$ могут быть найдены как решения обратных СДУ

$$Y_t = \xi + \int_t^T k|Z_s|\,ds - \int_t^T Z_s\,dB_s$$

и

$$Y'_t = \xi - \int_t^T k|Z'_s|\,ds - \int_t^T Z'_s\,dB_s.$$

- Покажем, как можно

оценить $\mathbb{C}^*(\xi)$ и $\mathbb{C}_*(\xi)$ через интегралы Шоке.

Положим

$$\underline{V}(A) = \inf_{Q \in \mathcal{P}_k} Q(A), \qquad \overline{V}(A) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_k} Q(A),$$

где

$$\mathcal{P}_k = \left\{ Q \sim \mathbf{P} \colon \frac{dQ}{d\mathbf{P}} = \exp\left\{ \int_0^T \nu_t \, dB_t - \frac{1}{2} \int_0^T \nu_t^2 \, dt \right\}, \ \sup_{0 \le t \le T} |\nu_t| \le k \right\}.$$

Пусть

$$\underline{C}(\xi) = \int_0^\infty \underline{V}(\xi > t) \, dt + \int_{-\infty}^0 [\underline{V}(\xi > t) - 1] \, dt,$$

$$\overline{C}(\xi) = \int_0^\infty \overline{V}(\xi > t) \, dt + \int_{-\infty}^0 [\overline{V}(\xi > t) - 1] \, dt.$$

Тогда ясно, что

$$
\begin{aligned}
\mathbb{C}^*(\xi) &= \sup_{Q\in\mathcal{P}_k} \mathbf{E}_Q\xi = \sup_{Q\in\mathcal{P}_k}\left[\int_0^\infty Q(\xi>t)\,dt + \int_{-\infty}^0 [Q(\xi>t)-1]\,dt\right] \\
&\le \int_0^\infty \sup_{Q\in\mathcal{P}_k} Q(\xi>t)\,dt + \int_{-\infty}^0 \left[\sup_{Q\in\mathcal{P}_k} Q(\xi>t)-1\right]dt \\
&= \int_0^\infty \overline{V}(\xi>t)\,dt + \int_{-\infty}^0 [\overline{V}(\xi>t)-1]\,dt = \overline{C}(\xi).
\end{aligned}
$$

Аналогично, $\inf_{Q\in\mathcal{P}_k}\mathbf{E}_Q\xi \ge \underline{C}(\xi)$. Итак,

$$\boxed{\underline{C}(\xi) \le \mathbb{C}_*(\xi) \le \mathbb{C}^*(\xi) \le \overline{C}(\xi).}$$